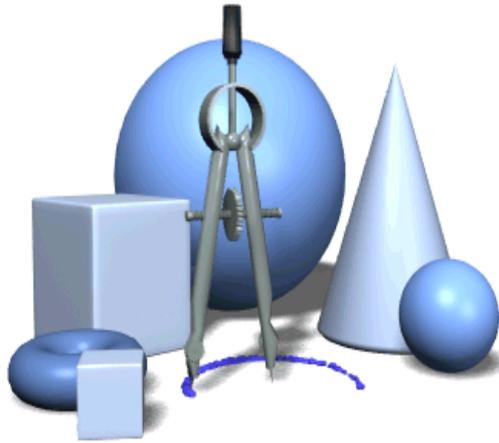


المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
قطاع التعليم المدرسي
الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
جهة سوس ماسة درعة
نيابة انزكآن - آيت ملول

الأنشطة الهندسية

الثالثة ثانوي إعدادي

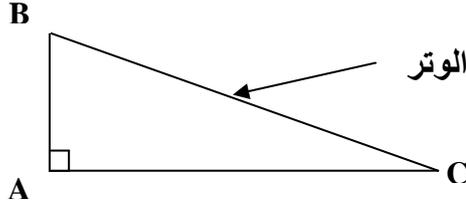


مبرهنة فيثاغورس

I. مبرهنة فيثاغورس المباشرة:

مبرهنة 1:

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A ، فإن: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



ملاحظة:

العلاقة السابقة مرتبطة برأس الزاوية القائمة، فإذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B ، فإن العلاقة تصبح: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

II. مبرهنة فيثاغورس العكسية:

مبرهنة 2:

ABC مثلث.

إذا كان: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ، فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

III. خلاصة:

م.ف.م.

يكون المثلث ABC قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا كان: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

م.ف.ع.

مبرهنة طاليس

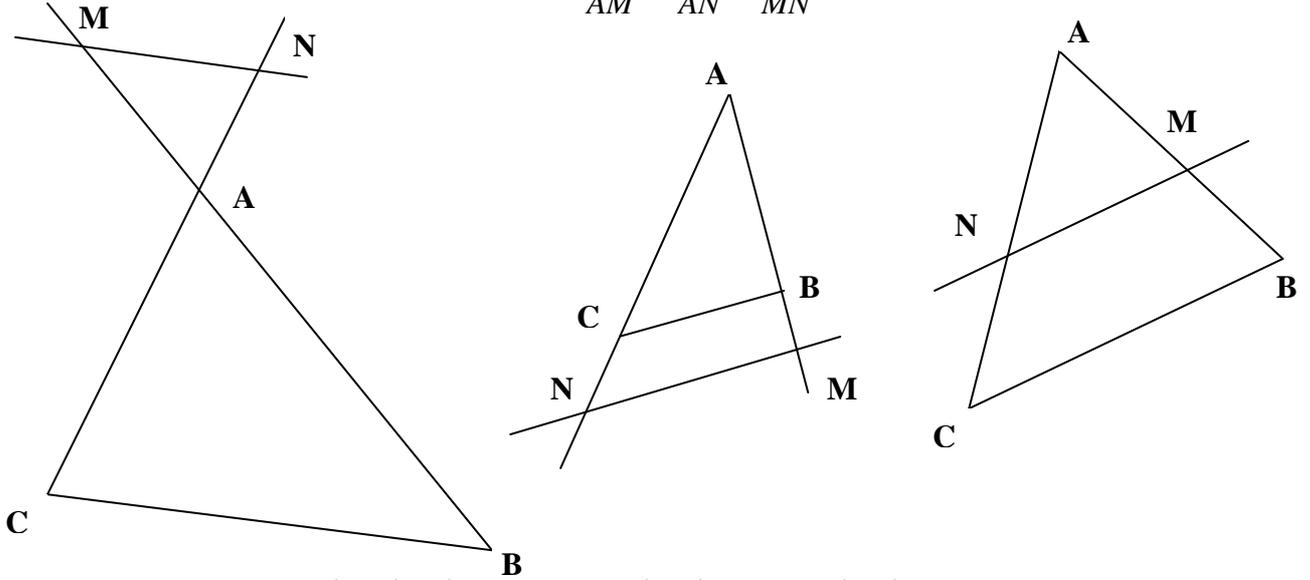
I. مبرهنة طاليس المباشرة:

مبرهنة 1:

مثلث ABC ، مثلث، M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC) .

إذا كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان، فإن: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

و من العلاقة السابقة لدينا أيضا: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$



$(MN) \parallel (BC)$ و $N \in (AC)$ و $M \in (AB)$

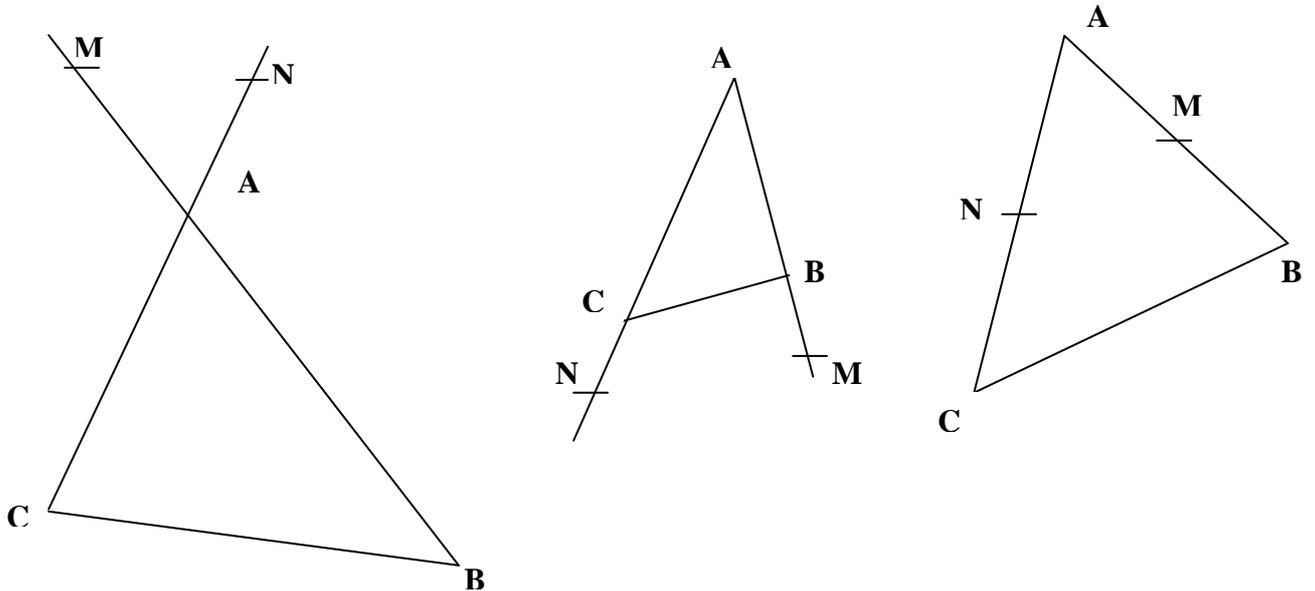
II. مبرهنة طاليس العكسية:

مبرهنة 2:

مثلث ABC ، مثلث، M نقطة من المستقيم (AB) و N نقطة من المستقيم (AC) .

إذا كانت النقط A و M و B لها نفس ترتيب النقط A و N و C و $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

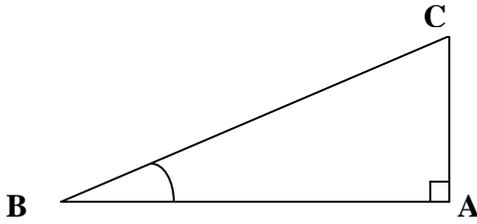
فإن المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان.



ملاحظة: المبرهنة السابقة صحيحة أيضا في حالة: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

الحساب المثلثي

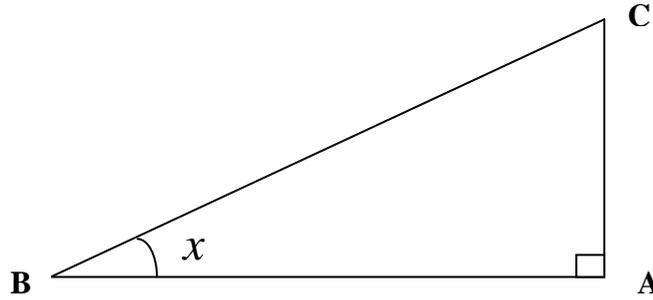
مصطلحات:



- باعتبار الزاوية \widehat{ABC} في المثلث ABC القائم الزاوية في A :
- الضلع $[AB]$ يسمى: الضلع المجازي؛
 - الضلع $[AC]$ يسمى: الضلع المقابل؛
 - الضلع $[BC]$ يسمى: الوتر.

1. النسب المثلثية لزاوية حادة غير منعدمة:

لتكن \widehat{ABC} زاوية حادة غير منعدمة قياسها x في مثلث ABC قائم الزاوية في A كما هو مبين في الشكل التالي:



- النسبة $\frac{AB}{BC}$ (طول الضلع المجازي على الوتر) تسمى جيب تمام الزاوية \widehat{ABC} أو جيب تمام القياس x .
نكتب $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ أو $\cos x = \frac{AB}{BC}$ ، ونقرأ: $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$.
 - النسبة $\frac{AC}{BC}$ (طول الضلع المقابل على الوتر) تسمى جيب الزاوية \widehat{ABC} أو جيب القياس x .
نكتب $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ أو $\sin x = \frac{AC}{BC}$ ، ونقرأ: $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$.
 - النسبة $\frac{AC}{AB}$ (طول الضلع المقابل على طول الضلع المجازي) تسمى ظل الزاوية \widehat{ABC} أو ظل القياس x .
نكتب $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ أو $\tan x = \frac{AC}{AB}$ (يرمز له أيضا ب $\tan x$)، ونقرأ: $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$.
- النسب $\cos \widehat{ABC}$ و $\sin \widehat{ABC}$ و $\tan \widehat{ABC}$ تسمى نسباً مثلثية للزاوية الحادة غير المنعدمة \widehat{ABC} (أو للقياس x).

ملاحظة:

x قياس زاوية حادة حيث: $0^\circ < x < 90^\circ$.

$$0 < \cos \widehat{ABC} < 1 \quad \text{و} \quad 0 < \sin \widehat{ABC} < 1 \quad \text{و} \quad 0 < \tan \widehat{ABC}$$

2. العلاقات المثلثية:

خاصية 1:

x قياس زاوية حادة حيث: $0^\circ \leq x < 90^\circ$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

خاصية 2:

x قياس زاوية حادة.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

خاصية 3:

α و β قياسا زاويتين متتامتين غير منعدمتين ($\alpha + \beta = 90^\circ$).

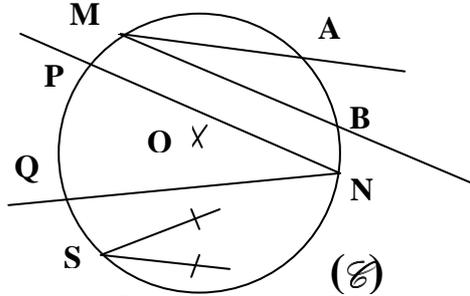
$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \sin \beta \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$$

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية في دائرة

في ما يلي نعتبر (ع) دائرة مركزها O .

I | الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية في دائرة:

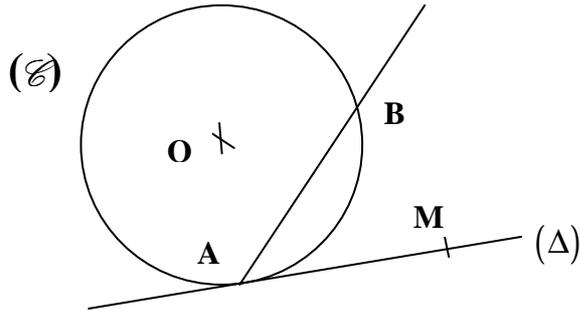
1. | الزوايا المحيطية في دائرة:



في الرسم السابق الزوايا AMB و PNQ و RST لها رؤوس تنتمي لمحيط الدائرة (ع) و تحصر (تحدد) أقواسا عليها، إذن فهي تسمى زوايا محيطية في الدائرة (ع).

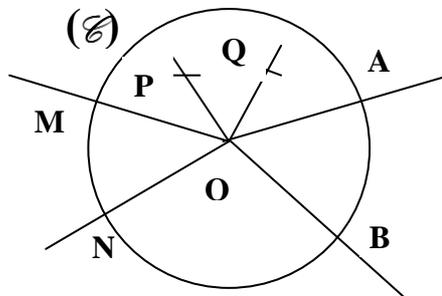
و نقول (مثلا): الزاوية AMB زاوية محيطية في الدائرة (ع) تحصر القوس \widehat{AB} .

ملاحظة (حالة خاصة):



إذا كان (Δ) مستقيما مماسا للدائرة (ع) في نقطة A (انظر الرسم السابق)، فإن الزاوية MAB تعتبر زاوية محيطية في الدائرة (ع) تحصر القوس \widehat{AB} .

2. | الزوايا المركزية في دائرة :

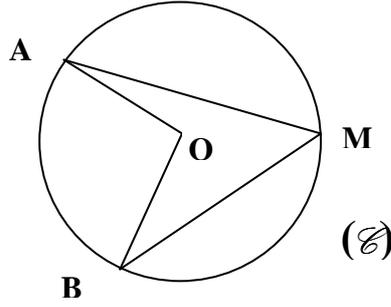


في الرسم السابق الزوايا AOB و MON و POQ لها رؤوس مشترك و هو O مركز الدائرة (ع)، إذن فهي تسمى زوايا مركزية في الدائرة (ع).

و نقول (مثلا): الزاوية AOB زاوية مركزية في الدائرة (ع) تحصر القوس \widehat{AB} .

3. ملاحظات:

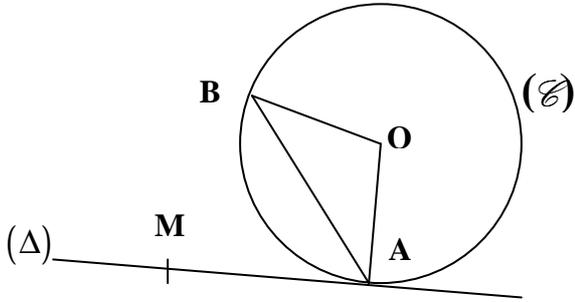
نعتبر الرسم التالي:



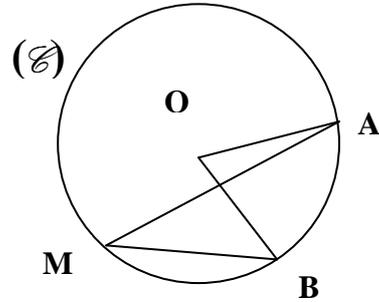
- هناك زاوية مركزية وحيدة في الدائرة (E) تحصر القوس \widehat{AB} و هي \widehat{AOB} بينما هناك عدد غير منته من الزوايا المحيطة في الدائرة (E) تحصر القوس \widehat{AB} .
- \widehat{AOB} هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة \widehat{AMB} في الدائرة (E).

II. خاصيتان:

1. العلاقة بين قياس الزاوية المحيطة في دائرة و قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها:



$$\widehat{MAB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \quad ; \quad \widehat{AOB} = 2\widehat{MAB}$$

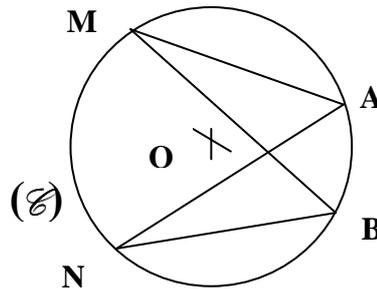


$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \quad ; \quad \widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

خاصية:

قياس زاوية محيطة في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المرتبطة بها.

2. العلاقة بين قياس زاويتين محيبتين في دائرة تحصران نفس القوس:



$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

خاصية:

إذا حصرت زاويتان محيبتان في دائرة نفس القوس فإنهما تكونان متقايتان.

المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

I. المثلثات المتقايسة:

1. تعريف و نتائج:

تعريف:

نقول عن مثلثين إنهما متقايسان عندما يكونان قابلان للتطابق.

نتيجتان:

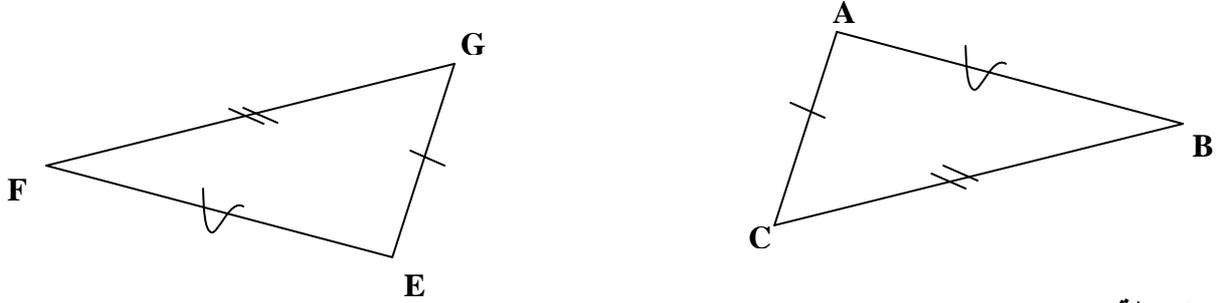
في مثلثين متقايسين:

- كل ضلعين متناظرين متقايسان،
- كل زاويتين متناظرتين متقايسان.

2. حالات تقايس مثلثين:

خاصية 1 (الحالة الأولى):

إذا قايسة أضلاع مثلث أضلاع مثلث آخر، على التوالي، فإن هذين المثلثين متقايسان.

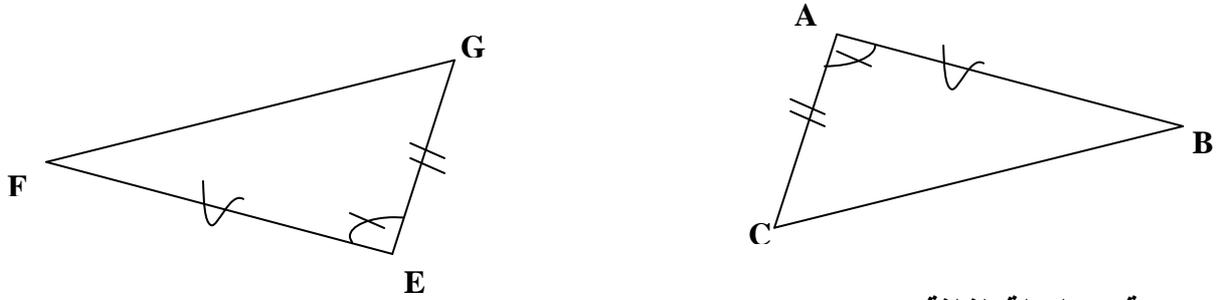


ملاحظة:

كل مثلث يقايس مائله بتمائله مركزي أو بتمائل محوري.

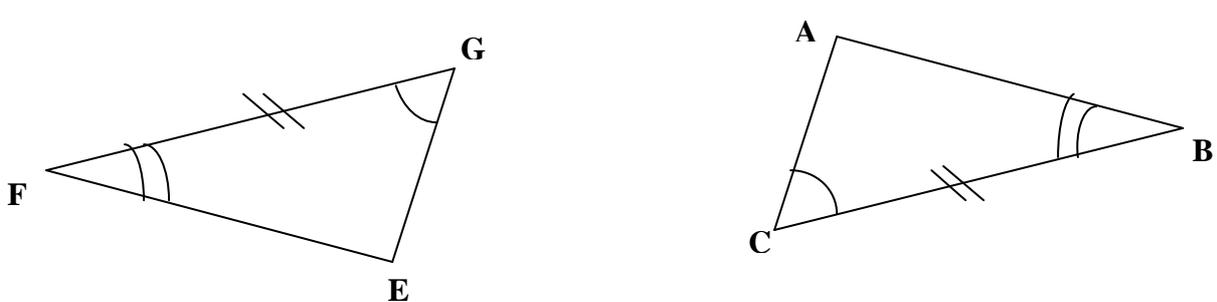
خاصية 2 (الحالة الثانية):

إذا قايس ضلعان لمثلث و الزاوية المحصورة بينهما، على التوالي، ضلعين لمثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما، فإن هذين المثلثين متقايسان.



خاصية 3 (الحالة الثالثة):

إذا قايسة زاويتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما، على التوالي، زاويتين لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما، فإن هذين المثلثين متقايسان.



II. المثلثات المتشابهة:

1. تعريف و نتائج:

تعريف:

نقول على مثلثين أنهما متشابهان عندما تقايس زوايا أحدهما زوايا المثلث الآخر على التوالي.

ملاحظة:

نتحدث أيضا في مثلثين متشابهين عن الأضلاع المتناظرة و عن الزوايا المتناظرة.

نتيجتان:

في مثلثين متشابهين:

- كل زاويتين متناظرتين تكونان متقايستان،
- أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة على التوالي.

ملاحظات:

- في مثلثين متشابهين ABC و EFG :

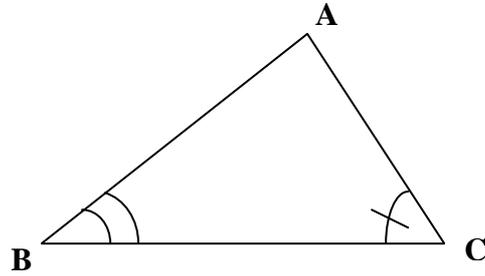
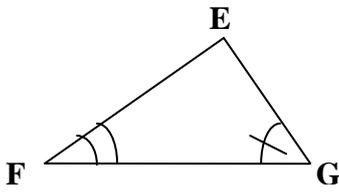
$$\text{لدينا: } \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = k$$

- العدد k يسمى نسبة تشابه المثلثين ABC و EFG ، في هذا الترتيب.
- يمكن معرفة الأضلاع المتناظرة في مثلثين متشابهين و ذلك بترتيب أطوال أضلاع كل مثلث على التوالي ترتيبا إما تصاعديا و إما تناقصيا.

2. حالات تشابه مثلثين:

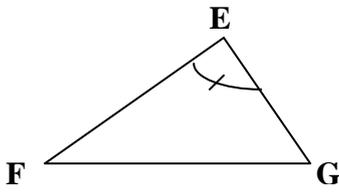
خاصية 1 (الحالة الأولى):

إذا قايست زاويتان لمثلث، على التوالي، زاويتين لمثلث آخر، فإن هذين المثلثين متشابهان.



خاصية 2 (الحالة الثانية):

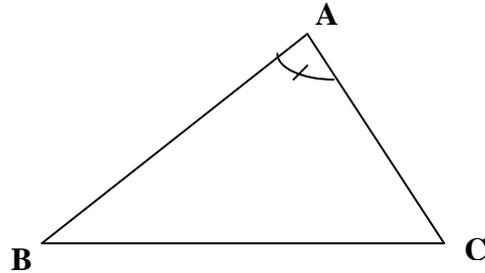
إذا قايست زاوية لمثلث زاوية لمثلث آخر، و كانت أطوال الأضلاع المحاذية للزاويتين متناسبة، على التوالي، فإن هذين المثلثين متشابهان.



$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$$

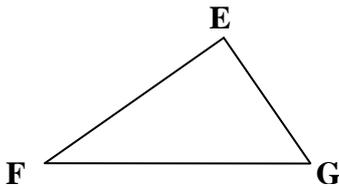
أو

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC}$$



خاصية 3 (الحالة الثالثة):

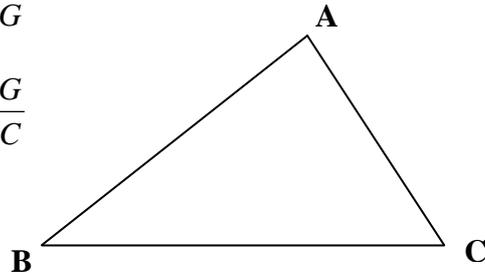
إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة، على التوالي، مع أطوال أضلاع مثلث آخر، فإن هذين المثلثين متشابهان.



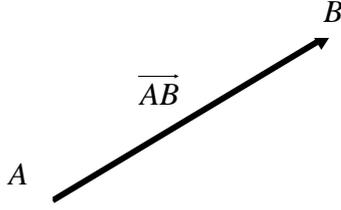
$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

أو

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC}$$



الإزاحة والمتجهات



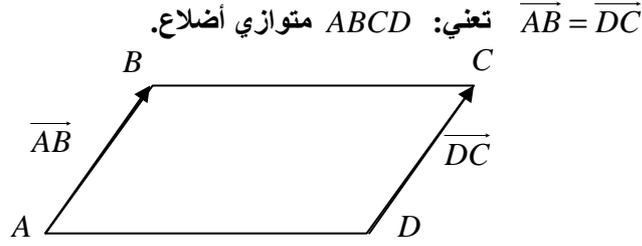
I. تذكير:

1. العناصر المحددة لمتجهة:

المتجهة \overline{AB} تحدد بالعناصر التالية:

- ❖ الاتجاه: المستقيم (AB) ،
- ❖ المنحى: من الأصل A نحو الطرف B ،
- ❖ المنظم: المسافة AB .

2. تساوي متجهتين:



3. متجهة منعدمة:

$$\overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} = \vec{0}$$

4. مقابل متجهة:

مقابل المتجهة \overline{AB} هو المتجهة \overline{BA} و نكتب: $\overline{BA} = -\overline{AB}$

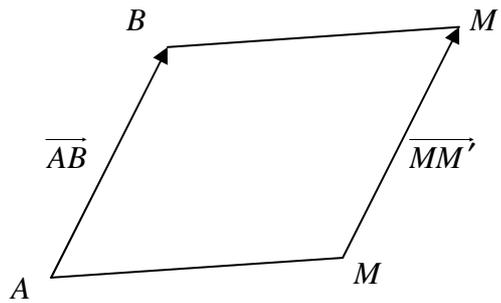
$$\overline{AB} + \vec{0} = \overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$$

II. الإزاحة:

تعريف:

A و B نقطتان من المستوى.
صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B هي النقطة M' حيث $ABM'M$ متوازي أضلاع.



نقول أيضا M' صورة M بإزاحة ذات المتجهة \overline{AB} .

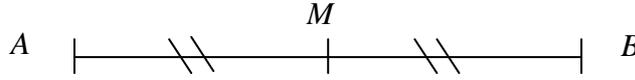
خصائص:

- (1) إذا كانت M' و N' صورتا M و N على التوالي بنفس الإزاحة، فإن: $\overline{MN} = \overline{M'N'}$.
- (2) صورة مستقيم (D) بإزاحة هو مستقيم (D') يوازيه.
- (3) صورة نصف مستقيم $[MN]$ بإزاحة هي نصف مستقيم $[M'N']$.
- (4) صورة قطعة $[MN]$ بإزاحة هي قطعة $[M'N']$ تقايسها.
- (5) صورة دائرة (C) مركزها O بإزاحة هي دائرة (C') لها نفس الشعاع و مركزها O' صورة O بنفس الإزاحة.
- (6) صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها.

المتجهات:1. المتجهة ومنتصف قطعة:

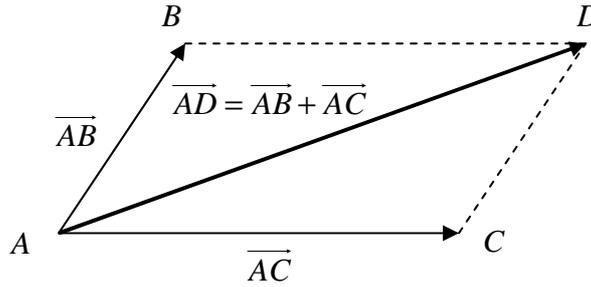
A و B و M ثلاث نقط من المستوى.

M منتصف القطعة [AB] تعني: $\overline{AM} = \overline{MB}$

2. مجموع متجهتين:

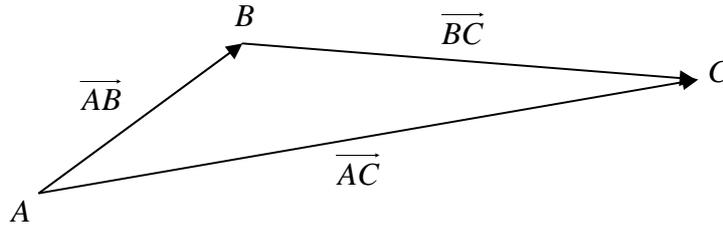
A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

مجموع المتجهتين \overline{AB} و \overline{AC} هو المتجهة \overline{AD} بحيث $ABDC$ متوازي أضلاع، و نكتب:
 $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$

3. علاقة شال:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

لدينا: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

4. جداء متجهة في عدد حقيقي:

A و B نقطتان مختلفتان من المستوى و k عدد حقيقي.

نقول إن المتجهة \overline{AC} هي جداء المتجهة \overline{AB} في العدد الحقيقي k و نكتب: $\overline{AC} = k\overline{AB}$ ، إذا كانت C تنتمي للمستقيم (AB) بحيث:

- إذا كان $k > 0$: $AC = kAB$ و \overline{AC} و \overline{AB} لهما نفس المنحى.
- إذا كان $k < 0$: $AC = -kAB$ و \overline{AC} و \overline{AB} لهما منحيان متعاكسان.

ملاحظة:

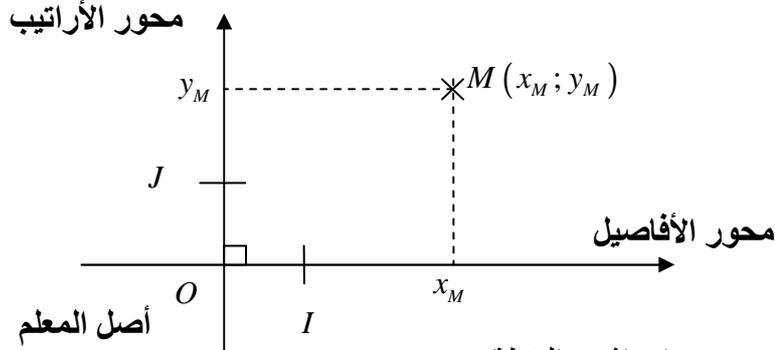
A و B و M ثلاث نقط من المستوى و k عدد حقيقي.

تعني: $\overline{AM} = k\overline{AB}$ النقط A و B و M نقط مستقيمة.

المعلم في المستوى

1. إحداثيات نقطة:

ليكن (O, I, J) معلما متعامدا ممنظما للمستوى $(OI \perp OJ)$ و $(OI = OJ = 1)$.



$(x_M; y_M)$ هو زوج إحداثياتي النقطة M .

x_M و y_M هما على التوالي أفصول و أرتوب النقطة M .

2. إحداثيات متجهة:

خاصية 1:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$.

إحداثيات المتجهة \overline{AB} هما: $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$ ، و نكتب: $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

3. تساوي متجهتين:

خاصية 2:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر المتجهتين $\overline{AB}(a; b)$ و $\overline{CD}(c; d)$.

$\overline{AB} = \overline{CD}$ تعني: $a = c$ و $b = d$.

4. إحداثيات مجموع متجهتين – إحداثيات ضرب متجهة في عدد حقيقي:

خاصية 3:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر المتجهتين $\overline{AB}(a; b)$ و $\overline{CD}(c; d)$ و العدد الحقيقي k .

$\overline{AB} + \overline{CD}(a+c; b+d)$ و $k\overline{AB}(ka; kb)$.

5. إحداثيات منتصف قطعة:

خاصية 4:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$.

M منتصف القطعة $[AB]$ تعني: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

6. المسافة بين نقطتين:

خاصية 5:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ملاحظة "منظم متجهة":

في م.م.م. (O, I, J) إذا كانت: $\overline{AB}(a; b)$ ، فإن: $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

معادلة مستقيم

1. المعادلة المختصرة لمستقيم:

تعريف 1:

ليكن (O, I, J) معلما متعامدا منظمًا للمستوى.
كل مستقيم (D) غير مواز لمحور الأرتيب له معادلة مختصرة تكتب على شكل: $y = mx + p$ ،
و نكتب: $(D): y = mx + p$ ، مع m و p عدنان حقيقيان معلومان.
 m يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (D) .
 p يسمى الأرتوب عند الأصل.

خاصية 1:

في م.م.م. (O, I, J) ، إذا كان المستقيم $(D): y = mx + p$ يمر من نقطتين مختلفتين $A(x_A; y_A)$

$$\text{و } B(x_B; y_B) \text{ مع } x_A \neq x_B \text{ ، فإن: } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ملاحظة:

لإنشاء التمثيل المبياني لمستقيم معرف بمعادلته المختصرة نحتاج نقطتين مختلفتين.

	A	B
x	x_A	x_B
y	y_A	y_B

يستحسن إذا كان $(D): y = mx + p$ حيث m و p عدنان صحيحان نسبيان أن نأخذ $x_A = 0$ ثم $x_A = \pm 1$ (حسب الحالة التي لدينا).

2. توازي مستقيمين:

خاصية 2:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر المستقيمين: $(D): y = mx + p$ و $(\Delta): y = m'x + p'$.
 $(D) // (\Delta)$ تعني: $m = m'$.

3. تعامد مستقيمين:

خاصية 3:

في م.م.م. (O, I, J) ، نعتبر المستقيمين: $(D): y = mx + p$ و $(\Delta): y = m'x + p'$.
 $(D) \perp (\Delta)$ تعني: $mm' = -1$.

حساب الحجم: التكبير والتصغير

I. المستقيمت و المستويات في الفضاء:

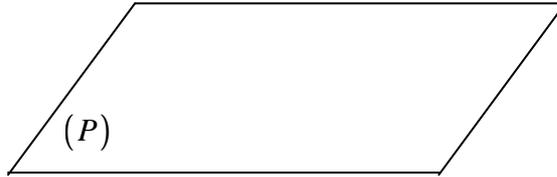
تمهيد:

- بعد ملاحظة قاعة القسم يمكن أن نخلص إلى أن:
- ✓ الفضاء مجموعة غير محدودة من النقط، و المستوى و المستقيم جزءان من الفضاء،
 - ✓ لرسم الأشكال في الفضاء فإننا غالبا ما لا نحترم طبيعة الأشكال، و تمثل الأجزاء المرئية بخطوط متصلة بينما الأجزاء غير المرئية تمثل بخطوط متقطعة،
 - ✓ المجسم جزء من الفضاء محدود بسطح.

1. المستويات في الفضاء:

أ. تمثيل مستوى في الفضاء:

عادة تمثل المستوى في الفضاء بمتوازي الأضلاع.



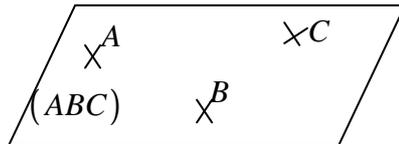
ب. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء:

(P) و (Q) مستويان في الفضاء.

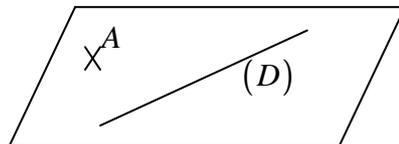
(P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم	(P) و (Q) متوازيان قطعا	(P) و (Q) منطبقان
	(P) // (Q)	

ت. تحديد مستوى:

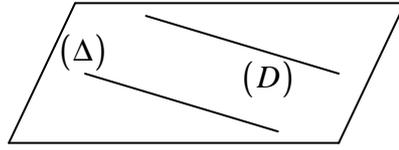
- كل ثلاث نقط غير مستقيمية في الفضاء تحدد مستوى وحيدا يرمز له بالرمز (ABC)؛



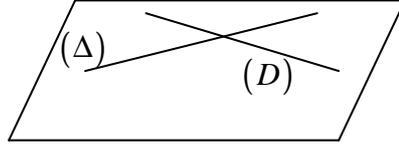
- كل مستقيم و نقطة خارجه في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



- كل مستقيمين متوازيين قطعا في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



- كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيدا؛



ملاحظة: جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء.
2. المستقيمت في الفضاء:

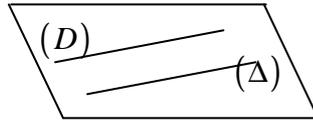
a. المستقيمت المستوائية:

تعريف:

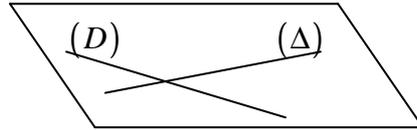
يكون مستقيمان مستوائيان إذا كانا يوجدان ضمن نفس المستوى.
 و في هذه الحالة يكونان:
 ❖ إما منطبقين:



❖ و إما متوازيين قطعا:



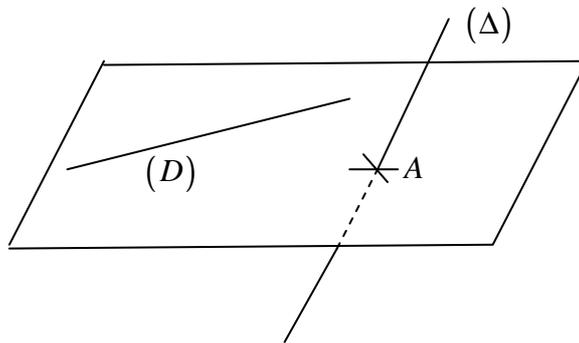
❖ و إما متقاطعين:



b. المستقيمت غير المستوائية:

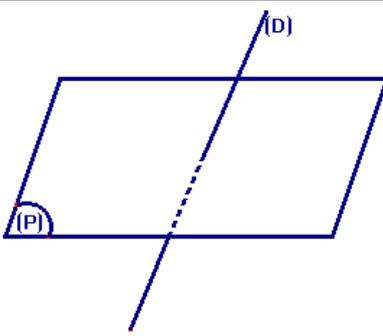
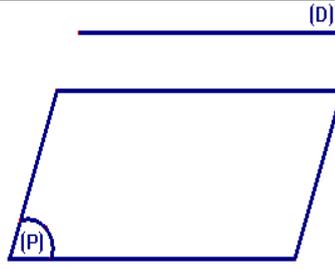
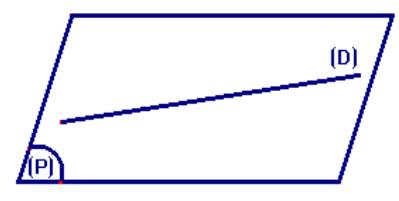
تعريف:

يكون مستقيمان غير مستوائيان إذا لم يوجد أي مستوى يتضمنهما معا.



3. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء:

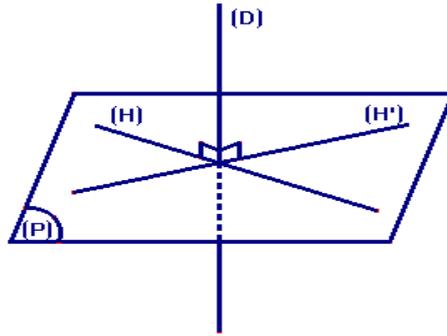
(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.

(D) يخترق (P) في نقطة	(D) يوازي قطاعا (P)	(D) ضمن (P)
		
$(D) // (P)$		

تعامد مستقيم و مستوى في الفضاء:

تعريف:

(D) مستقيم في الفضاء مستوى (P) في نقطة A .
 نقول إن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) في النقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على جميع المستقيمتان الواقعة ضمن (P) و المارة من النقطة A ، و نكتب: $(D) \perp (P)$.



مبرهنة:

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على مستقيمين من (P) متقاطعين في A .

نتيجة:

إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) ، فإن (D) يكون عموديا على جميع المستقيمتان الموجودة ضمن (P) .

II. التكبير و التصغير:

تعريف:

انطلاقا من شكل نستخرج شكلا يشابهه و ذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي k موجب قطاعا و يخالف 1 .

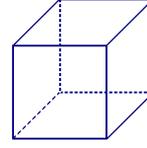
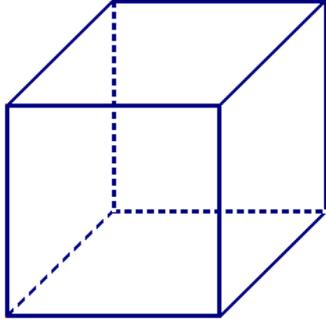
ملاحظة:

- ✓ نحصل على شكل مكبر إذا كان $k > 1$ و نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k .
- ✓ نحصل على شكل مصغر إذا كان $0 < k < 1$ و نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k .

خاصية:

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء بنسبة k ، فإن :
 • المسافة تضرب في k ،

- المساحة تضرب في k^2 ،
- الحجم يضرب في k^3 .



الشكل الأصلي

l
 S
 V

بعد تصغير أو تكبير نسبه k

$$\begin{aligned} l' &= k \times l \\ S' &= k^2 \times S \\ V' &= k^3 \times V \end{aligned}$$

الشكل المحصل عليه

l'
 S'
 V'